## EX6

1. $f'(x) = 2 + e^{-x}$

2. $f'(x) = 2x - \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$

3. $f'(x) = e^{-x} - x\,e^{-x} = (1-x)\,e^{-x}$

4. $f'(x) = \frac{e^x - e^x(x-1)}{e^{2x}} = \frac{2-x}{e^x}$

$= (2-x)\,e^{-x}$

5. $f'(x) = \frac{2e^x(x^2+1) - 2x(e^{2x}-1)}{(x^2+1)^2} =$

$= \frac{2\left[(x^2-x+1)e^{2x} + x\right]}{(x^2+1)^2}$

6. $f'(x) = 2 - 2\frac{e^x}{e^x+1} = \frac{2}{e^x+1}$

7. $f'(x) = e^x.\mathrm{Ln}(x) + \frac{e^x}{x} = (\frac{1}{x} + \mathrm{Ln}(x))\,e^x$

8. $f'(x) = e^x + e^{-x}$

9. $f'(x) = \frac{(e^x+e^{-x})^2 - (e^x-e^{-x})^2}{(e^x+e^{-x})^2} =$

$\frac{4}{(e^x+e^{-x})^2}$

## EX7

$f(x) = (ax^2 + bx + c).\,e^{-x}$

$A(0,1) \in (\xi_f) \Rightarrow f(0) = 1$

On a aussi $f'(1) = 0$ et $f'(0) = -6$

Or : $f'(x) = (2ax + b)\,e^{-x} - (ax^2 + bx + c).\,e^{-x}$

$f'(x) = [-ax^2 + (2a - b)x + (b-c)].\,e^{-x}$

$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ f'(1) = 0 \\ f'(0) = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 1 \\ a - c = 0 \\ b - c = -6 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \quad c = 1 \; ; \; a = 1$ et $b = -5$

Donc : $f(x) = (x^2 - 5x + 1).\,e^{-x}$

## EX8

$f(x) = (x+1)^2.\,e^{-x}$

1) $f'(x) = 2(x+1)\,e^{-x} - e^{-x}(1+x)^2$

$= (1-x^2)\,e^{-x}$

$f''(x) = -2x\,e^{-x} - e^{-x}(1-x^2)$

$= (x^2 - 2x - 1)\,e^{-x}$

2) Démonstration par récurrence :

* Pour n = 1

$f'(x) = (1-x^2)\,e^{-x}$

$= (-1)^1[(x^2 - 0.x + (-1)]\,e^{-x}$

$a_1 = 0$ et $b_1 = -1$ ( Vrai)

*supposons que :

$f^{(n)}(x) = (-1)^n[(x^2 + a_n.x + b_n]\,e^{-x}$

avec $a_n$. et $b_n$ des réels et montrons que

$f^{(n+1)}(x) = (-1)^{n+1}[(x^2 + a_{n+1}.x + b_{n+1}]\,e^{-x}$

en Effet

$f^{(n+1)}(x) = (-1)^n[(2x + a_n)\,e^{-x} - (x^2 + a_n.x + b_n)e^{-x}]$

$= (-1)^n[-x^2 - (a_n.-2)x + (a_n - b_n)]\,e^{-x}$

$= (-1)^{n+1}[x^2 + (a_n.-2)x + (b_n - a_n)]\,e^{-x}$

De la forme

$f^{(n+1)}(x) = (-1)^{n+1}[x^2 + a_{n+1}x + b_{n+1}]\,e^{-x}$

avec $\begin{cases} a_{n+1} = a_n.-2 \\ a_1 = 0 \end{cases}$ et $\begin{cases} b_{n+1} = b_n - a_n \\ b_1 = -1 \end{cases}$

3) $(a_n.)$ est une suite arithmétique de raison

$r = -2$ d'où $a_n = a_1 + (n-1)r$

$\boxed{a_n = -2(n-1)}$

pour $k \geq 2$ , $b_k = b_{k-1} - a_{k-1}$

$\Rightarrow \sum_{k=2}^{n} b_k = \sum_{k=2}^{n} b_{k-1} - \sum_{k=2}^{n} a_{k-1}$

$\Rightarrow \sum_{k=2}^{n} b_k = \sum_{k=1}^{n-1} b_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_k$

$\Rightarrow b_n = b_1 - \frac{n-1}{2}(a_1 + a_{n-1})$

$\Rightarrow b_n = b_1 - \frac{n-1}{2}[-2(n-2)]$

Qarray.tn -Aqra Blech- Qarray.tn